УДК 511; 510.6; 501

ОШИБОЧНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УАЙЛСА ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Ивлиев Ю.А.

Международная академия информатизации, Москва

Подробная информация об авторах размещена на сайте «Учёные России» - http://www.famous-scientists.ru

Статья посвящена описанию принципиальной математической ошибки, допущенной в процессе доказательства Великой теоремы Ферма в конце XX века. Обнаруженная ошибка не только искажает истинный смысл теоремы, но и препятствует развитию нового аксиоматического подхода к исследованию степеней чисел и натурального ряда чисел.

В 1995 году вышла статья [5], по размеру похожая на книгу и сообщавшая о доказательстве знаменитой Великой (Последней) теоремы Ферма (ВТФ) (об истории теоремы и попытках ее доказать см., например, [2]). После этого события появилось множество научных статей и научно-популярных книг, пропагандирующих это доказательство, однако ни в одном из этих трудов не была вскрыта принципиальная математическая ошибка в нем, вкравшаяся даже не по вине автора [5], а по какому-то странному оптимизму, охватившему умы математиков, занимавшихся указанной проблемой и смежными с ней вопросами. Психологические аспекты этого феномена были исследованы в [2]. Здесь же дается детальный анализ произошедшей оплошности, которая носит не частный характер, а является следствием неправильного понимания свойств степеней целых чисел. Как показано в [1], проблема Ферма коренится в новом аксиоматическом подходе к изучению этих свойств, который до сих пор в современной науке не применялся. Но на его пути встало ошибочное доказательство [5], предоставившее специалистам по теории чисел ложные ориентиры и уводящее исследователей проблемы Ферма в сторону от ее прямого и адекватного решения. Данная работа посвящена устранению этого препятствия.

1. Анатомия ошибки, допущенной в ходе доказательства ВТФ

В процессе очень длинных и утомительных рассуждений [5] первоначальное утверждение Ферма было переформулировано в терминах сопоставления диофантова уравнения p -ой степени с эллиптическими кривыми 3-его порядка (см. Теоремы 0.4 и 0.5 в [5]). Такое сопоставление заставило авторов фактически коллективного доказательства в [5] объявить о том, что их метод и рассуждения приводят к окончательному решению проблемы Ферма (напомним, что ВТФ не имела признанных доказательств для случая произвольных целых степеней целых чисел вплоть до 90-х годов прошлого столетия). Целью данного рассмотрения является установление математической некорректности указанного выше сопоставления и, как результат проведенного анализа, нахождение принципиальной ошибки в доказательстве, предъявленном в [5].

а) Где и в чем ошибка?

Итак, будем идти по тексту [5], где на с.448 говорится, что после «остроумной идеи» Г.Фрея (G.Frey) открылась возможность доказательства ВТФ. В 1984 году Г.Фрей предположил и

К.Рибет (K.Ribet) позднее доказал, что предполагаемая эллиптическая кривая, представляющая гипотетическое целое решение уравнения Ферма,

$$y^2 = x(x + u^p)(x - v^p) \qquad (1)$$

не может быть модулярной. Однако А.Уайлс (A.Wiles) и Р.Тейлор (R.Taylor) доказали, что всякая полустабильная эллиптическая кривая, определенная над по-

лем рациональных чисел, является модулярной. Отсюда следовал вывод о невозможности целочисленных решений уравнения Ферма и, следовательно, о справедливости утверждения Ферма, которое в обозначениях А.Уайлса записывалось как Теорема 0.5: пусть имеется равенство

$$u^p + v^p + w^p = 0 \tag{2}$$

где u, v, w - рациональные числа, целый показатель $p \geq 3$; тогда (2) выполняется, только если $uvw = 0$.

Теперь, по-видимому, следует вернуться назад и критически осмыслить, почему кривая (1) была априори воспринята как эллиптическая и какова ее реальная связь с уравнением Ферма. Предвидя этот вопрос, А.Уайлс ссылается на работу И.Эллегуарша (Y.Hellegouarch) [4], в которой тот нашел способ сопоставить уравнению Ферма (предположительно решаемому в целых числах) гипотетическую кривую 3-его порядка. В отличие от Г.Фрея И.Эллегуарш не связывал свою кривую с модулярными формами, однако его метод получения уравнения (1) был использован для дальнейшего продвижения доказательства А.Уайлса.

Остановимся подробнее на работе [4]. Свои рассуждения автор [4] проводит в терминах проективной геометрии. Упрощая некоторые его обозначения и приводя их в соответствие с [5], находим, что абелевой кривой

$$Y^2 = X(X - \beta^p)(X + \gamma^p) \tag{3}$$

сопоставляется диофантово уравнение

$$x^p + y^p + z^p = 0 \tag{4}$$

где x, y, z - неизвестные целые числа, p - целый показатель из (2), а решения диофантова уравнения (4) α^p, β^p, γ^p используются для записи абелевой кривой (3).

Теперь, чтобы удостовериться в том, что это кривая эллиптическая 3-его порядка, необходимо рассмотреть переменные X и Y в (3) на евклидовой плоскости. Для этого воспользуемся известным правилом арифметики эллиптических кривых: если имеются две рациональные точки на кубической алгебраической кривой и прямая, проходящая через эти точки, пересекает эту кривую еще в одной точке, то последняя также является рациональной точкой. Гипотетическое уравнение (4) формально представляет собой закон сложения точек на прямой. Если сделать замену переменных $x^p = A$, $y^p = B$, $z^p = C$ и направить полученную таким образом прямую по оси X в (3), то она пересечет кривую 3-ей степени в трех точках: ($X = 0$, $Y = 0$), ($X = \beta^p$, $Y = 0$), ($X = -\gamma^p$, $Y = 0$), что и отражено в записи абелевой кривой (3) и в аналогичной записи (1). Однако, является ли кривая (3) или (1) на самом деле эллиптической? Очевидно, что нет, потому что отрезки евклидовой прямой при сложении точек на ней взяты в нелинейном масштабе.

Возвращаясь к линейным координатным системам евклидова пространства, получаем вместо (1) и (3) формулы, весьма отличные от формул для эллиптических кривых. Например, (1) может быть следующей формой:

$$\eta^{2p} = \xi^p(\xi^p + u^p)(\xi^p - v^p) \tag{5}$$

где $\xi^p = x$, $\eta^p = y$, и апелляция к (1) в таком случае для вывода ВТФ представляется неправомерной. Несмотря на то, что (1) удовлетворяет некоторым критериям класса эллиптических кривых, все же самому главному критерию быть уравнением 3-ей степени в линейной системе координат оно не удовлетворяет.

б) Классификация ошибки

Итак, еще раз вернемся к началу рассмотрения и проследим, как делается в [5] вывод об истинности ВТФ. Во-первых, предполагается, что существует некое решение уравнения Ферма в положительных целых числах. Во-вторых, это решение произвольно вставляется в алгебраическую форму известного вида (плоскую кривую 3-ей степени) в предположении, что полученные таким образом эллиптические кривые существуют (второе неподтвержденное предположение). В-третьих, поскольку другими методами доказывается, что построенная конкретная кривая немодулярна, то, значит, она не существует. Отсюда следует заключение: целочисленного решения уравнения Ферма нет и, следовательно, ВТФ верна.

В этих рассуждениях есть одно слабое звено, которое после детальной проверки оказывается ошибкой. Эта ошибка совершается на втором этапе процесса доказательства, когда предполагается, что гипотетическое решение уравнения Ферма является одновременно и решением алгебраического уравнения 3-ей степени, описывающего эллиптическую кривую известного вида. Само по себе такое предположение было бы оправданным, если бы указанная кривая действительно являлась эллиптической. Однако, как видно из п.1а), эта кривая представлена в нелинейных координатах, что делает ее «иллюзорной», т.е. реально не существующей в линейном топологическом пространстве.

Теперь надо четко классифицировать найденную ошибку. Она заключается в том, что в качестве аргумента доказательства приводится то, что нужно доказать. В классической логике эта ошибка известна как «порочный круг». В данном случае целочисленное решение уравнения Ферма сопоставляется (по-видимому, предположительно однозначно) с фиктивной, несуществующей эллиптической кривой, а потом весь пафос дальнейших рассуждений уходит на то, чтобы доказать, что конкретная эллиптическая кривая такого вида, полученная из гипотетических решений уравнения Ферма, не существует.

Как же так получилось, что в серьезной математической работе [5] была пропущена столь элементарная ошибка? Наверно, это произошло из-за того, что ранее в математике не изучались «иллюзорные» геометрические фигуры указанного вида. Действительно, кого могла заинтересовать, например, фиктивная окружность, полученная из уравнения Ферма заменой переменных $x^{n/2} = A$, $y^{n/2} = B$, $z^{n/2} = C$? Ведь ее уравнение $C^2 = A^2 + B^2$ не имеет целочисленных решений при целых x, y, z и $n \geq 3$. В нелинейных координатных осях X и Y такая окружность описывалась бы уравнением, по внешнему виду очень похожему на стандартную форму:

$$Y^2 = -(X - A)(X + B),$$

где A и B уже не переменные, а конкретные числа, определяемые указанной выше заменой. Но если числам A и B придать первоначальный вид, заключающийся в их степенном характере, то сразу же бросается в глаза неоднородность обозначений в сомножителях правой части уравнения. Этот признак помогает отличить иллюзию от действительности и перейти от нелинейных координат к линейным. С другой стороны, если рассматривать числа как операторы при их сравнении с переменными, как например в (1), то те и другие должны быть однородными величинами, т.е. должны иметь одинаковые степени.

Такое понимание степеней чисел как операторов позволяет также увидеть, что сопоставление уравнения Ферма иллюзорной эллиптической кривой не является однозначным. Возьмем, к примеру, один из сомножителей в правой части (5) и разложим его на p линейных сомножителей, введя такое комплексное число r, что $r^p = 1$ (см. например [3]):

$$\xi^p + u^p = (\xi + u)(\xi + ru)(\xi + r^2u)\ldots(\xi + r^{p-1}u) \qquad (6)$$

Тогда форму (5) можно представить в виде разложения на простые сомножители комплексных чисел по типу алгебраического тождества (6), однако единственность такого разложения в общем случае

стоит под вопросом, что и было в свое время показано Куммером [3].

2. Выводы

Из предыдущего анализа следует, что так называемая арифметика эллиптических кривых не способна пролить свет на то, где надо искать доказательство ВТФ. После работы [5] утверждение Ферма, кстати, взятое эпиграфом к этой статье, стало восприниматься, как историческая шутка или розыгрыш. Однако на деле оказывается, что пошутил не Ферма, а специалисты, собравшиеся на математический симпозиум в Обервольфахе в Германии в 1984 году, на котором Г.Фрей озвучил свою остроумную идею. Последствия такого неосторожного заявления привели математику в целом на грань утраты ею общественного доверия, что подробно описано в [2] и что с необходимостью ставит перед наукой вопрос об ответственности научных учреждений перед обществом. Сопоставление уравнения Ферма кривой Фрея (1) является «замкóм» всего доказательства Уайлса относительно теоремы Ферма, и, если нет соответствия между кривой Ферма и модулярными эллиптическими кривыми, то значит нет и доказательства.

В последнее время появляются различные интернет-сообщения о том, будто бы некоторые видные математики, наконец-то, разобрались с доказательством Уайлса теоремы Ферма, придумав ему оправдание в виде «минимального» пересчета целых точек в евклидовом пространстве. Однако никакие новшества не в силах отменить классические результаты, уже добытые человечеством в математике, в частности, тот факт, что хотя любое порядковое число и совпадает с его количественным аналогом, оно не может быть ему заменой в операциях сравнения чисел между собой, а отсюда с неизбежностью следует вывод, что кривая Фрея (1) не является эллиптической изначально, т.е. не является ею по определению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ивлиев Ю.А. Реконструкция нативного доказательства Великой теоремы Ферма – Объединенный научный журнал (раздел «Математика»). Апрель 2006 № 7 (167) с.3-9, см. также Праці Луганського відділення Міжнародної Академії інформатизації. Міністерство освіти та науки України. Східноукраїнський національний університет ім. В.Даля. 2006 № 2 (13) с.19-25.

2. Ивлиев Ю.А. Величайшая научная афера XX века: «доказательство» Последней теоремы Ферма – Естественные и технические науки (раздел «История и методология математики»). Август 2007 № 4 (30) с.34-48.

3. Эдвардс Г. (Edwards H.M.) Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. Пер. с англ. под ред. Б.Ф.Скубенко. М.: Мир 1980, 484 с.

4. Hellegouarch Y. Points d'ordre $2p^h$ sur les courbes elliptiques – Acta Arithmetica. 1975 XXVI p.253-263.

5. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem – Annals of Mathematics. May 1995 v.141 Second series № 3 p.443-551.

WILES' FALSE PROOF OF FERMAT'S LAST THEOREM

Ivliyev Yu.A.

International academy of information, Moscow

The article is dedicated to description of one principal mathematical error committed in the process of proving Fermat's Last Theorem at the end of the XX-th century. The disclosed error not only misrepresents the true sense of the Theorem but stands in the way of development of a new axiomatic approach to research of numbers' degrees and natural numbers' series.